Übungen zur Vorlesung „Simulationsmethoden in der Physik 2”

PD Dr. Jörg Main **SS 2004**

Blatt 4

Perkolation und Renormierungsgruppentheorie

Hinweise: Sie können Ihre Lösungen mit Kommentaren und/oder weiteren Fragen innerhalb von zwei Wochen nach Ausgabe der Aufgaben per Email an Ihren Übungsleiter schicken.

`Jens Harting: j.harting@ica1.uni-stuttgart.de`

Aufgabe 8. *Perkolationsschwelle des Quadratgitters*
Bestimmen Sie Näherungswerte für die Perkolationsschwelle p_c des Quadratgitters. Lösen Sie hierzu die Fixpunktgleichung $p = R(p)$ mit

$$R(p) = \sum_{n=0}^{N} s_n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \tag{1}$$

für die Renormierung von $(b \times b)$-Gittern mit $N = b^2$ für $b = 3$ und $b = 4$. Die Wahrscheinlichkeiten s_n in Gl. (1), dass ein $(b \times b)$-Gitter mit n besetzten Gitterpunkten perkoliert, können Sie mit Hilfe Ihres “burning”-Algorithmus aus Aufgabe 5 bestimmen. Überprüfen Sie hierzu systematisch alle 2^{b^2} möglichen Konfigurationen auf Perkolation. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Perkolationsschwelle $p_c = 0.5927$ und der für $b = 2$ erhaltenen Näherung $p^* = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Aufgabe 9. *Perkolationsschwelle des Dreiecksgitters*
Die Perkolationsschwelle für Site-Perkolation beim Dreiecksgitter liegt bei $p_c = \frac{1}{2}$. Dieses so „einfach“ erscheinende Resultat sollte sich doch beweisen lassen? Versuchen Sie es!

<u>Hinweise</u>

Zeigen Sie zunächst: Im Dreiecksgitter perkoliert eine Konfiguration mit n besetzten Gitterpunkten genau dann *nicht* von oben nach unten, wenn die invertierte Konfiguration (d.h. die unbesetzten „Löcher“) von links nach rechts perkoliert.

Folgern Sie hieraus: Im $(b \times b)$-Gitter mit $N = b^2$ erfüllen die Wahrscheinlichkeiten s_n für die Perkolation einer Konfiguration mit n besetzten Gitterpunkten die Beziehung $s_n + s_{N-n} = 1$.

Zeigen Sie nun: Für beliebiges $b \geq 2$ ist $p = \frac{1}{2}$ Lösung der Fixpunktgleichung $p = R(p)$ mit $R(p)$ gegeben in Gl. (1).

Aufgabe 10.
Führen Sie die Renormierung des Dreiecksgitters (mit gleichseitigen Dreiecken) durch, indem Sie jeweils *drei* Gitterplätze durch einen neuen Platz ersetzen. Beachten Sie, dass die neuen Plätze wieder ein regelmäßiges Dreiecksgitter ergeben müssen.

a) Bestimmen Sie den Skalierungsfaktor, d.h. die Gitterkonstante des neuen Gitters in Einheiten der alten Gitterkonstante.

b) Wie lautet die Transformationsgleichung für die Besetzungswahrscheinlichkeit $p' = R(p)$, wenn man die *Majoritätsregel* verwendet, d.h. ein Platz wird genau dann besetzt, wenn die Mehrheit der alten Plätze besetzt war?

c) Welche Fixpunkte hat diese Gleichung und wie groß ist die kritische Wahrscheinlichkeit p_c in dieser Näherung?

d) Leiten Sie den kritischen Exponenten ν aus $R(p)$ ab.